УДК 519.6; 004.942

АЛГОРИТМ КОНТРОЛЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛЕННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

В.А. Засов
Самарский государственный университет путей сообщения
Россия, 443066, Самара, 1-ый Безымянный пер., 18
E-mail: vzasov@mail.ru

Ключевые слова: разделение сигналов, многомерная динамическая система, модели сигналов, статистические методы, вариации параметров, устойчивость, сингулярные интервалы параметров.

Предложен алгоритм контроля устойчивости статистических методов разделения сигналов. Алгоритм основан на анализе вычисленных сингулярных интервалов смешивающей матрицы для абсолютных, относительных, критических и стохастических вариаций параметров матрицы. Под сингулярными интервалами понимаются интервалы параметров смешивающей матрицы от исходных условий до условий, при которых матрица становиться сингулярной. Методами компьютерного моделирования подтверждается достоверность работы предложенного алгоритма в условиях различных вариаций параметров сигналов и характеристик каналов. Алгоритм может быть использован в задачах обработки сигналов в системах связи, технической и медицинской диагностики.

AN ALGORITHM OF MONITORING OF STABILITY OF STATISTICAL SEPARATION OF SIGNALS, BASED ON CALCULATION OF SINGULAR INTERVALS OF MODEL PARAMETERS

V.A. Zasov
Samara State Railway University
Russia, 443066, Samara, 1st Bezymyanny Lane, 18
E-mail: vzasov@mail.ru

Key words: signal separation, multidimensional dynamic system, signal models, statistical methods, parameter variations, stability, singular intervals of parameters.

An algorithm of monitoring the stability of statistical methods of signal separation is proposed. The algorithm is based on the analysis of calculation of singular intervals of the mixing matrix for absolute, relative, critical, and stochastic variations of parameters of the mixing matrix. As the singular intervals, intervals of parameters of the mixing matrix from initial conditions to conditions, under which the matrix become singular, are assumed. Methods of computer simulation confirm the authenticity of performance of the algorithm proposed under conditions of various variations of signal parameters and channel characteristics. The algorithm may be used in problems of signal processing in communication systems, engineering and medical diagnostics.

1. Введение

1.1. Задача разделения сигналов и общий подход к ее решению

Разделение сигналов (источников сигналов) – это решение задачи выделения отдельных сигналов из аддитивной смеси нескольких сигналов, поступающих в точки измерения от различных источников сигналов, недоступных для непосредственных измерений.

Решение этой задачи необходимо во многих областях практической деятельности: мониторинге и диагностике технических объектов (например, виброакустической диагностике), связи, сейсмографии, гидроакустике, в медицинской диагностике и т.д. Это связано с тем, что в сложных объектах измеренные сигналы представляют собой аддитивную смесь сигналов, поступающих от многих узлов, и выделение параметров, описывающих техническое состояние конкретных узлов без разделения сигналов невозможно для большинства практических приложений.

Кроме того, разделение сигналов позволяет реализовать последующую параллельную обработку во времени каждого из выделенных сигналов, что увеличивает быстродействие систем мониторинга.

Для формализованной постановки задачи рассмотрим модель образования сигналов, которую представим в виде линейной многомерной системы, имеющей N входов и M выходов. Входными сигналами модели являются сигналы $s_n(k)$, $n = 1,2,...,N$, выходными сигналами $x_m(k)$, $m = 1,2,...,M$. Входные сигналы – это сигналы, генерируемые различными источниками сигналов, а выходными сигналами этой системы могут являться сигналы различных приемных устройств, например, датчиков, измерительных преобразователей, антенн и т.п. Положим, что каждый из M выходов такой многомерной системы связан со всеми N входами линейными каналами передачи сигналов.

В любой дискретный момент времени k M - мерный вектор измеряемых датчиками дискретных сигналов $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k),..., x_M(k)]^T$ получается из N-мерного вектора сигналов источников $\mathbf{s}(k) = [s_1(k), s_2(k),..., s_N(k)]^T$. Математическая модель образования сигналов описывается системой уравнений типа дискретной свертки (1), где m-ый наблюдаемый сигнал представляет собой аддитивную смесь искаженных каналами сигналов источников и шума [1], т.е.

(1) $$x_m(k) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{g=0}^{G-1} (h_{mn}(g, \mathbf{l})) s_n(k - g) + y_m(k),$$

где $h_{mn}(g)$ – элемент $M \times N$ матрицы $\mathbf{h}(g)$ импульсных характеристик каналов, $\mathbf{y}(k) = [y_1(k), y_2(k),..., y_M(k)]^T$ – вектор шума. В дальнейшем положим, что импульсные характеристики $h_{mn}(g)$ конечны (КИХ) и представляются числом отсчетов G. Динамические характеристики каналов $h_{mn}(g, \mathbf{l})$ являются квазистационарными, т.е. изменяются в зависимости от некоторого вектора параметров $\mathbf{l}$ (времени, температуры, местоположения и т.д.).

В частотной области модель (1) описывается как

(2) $$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{S}(\omega) + \mathbf{Y}(\omega),$$

где $\mathbf{X}(\omega) = [X_1(\omega), \ldots, X_M(\omega)]^T$ – вектор наблюдаемых сигналов, состоящий из фурье-образов сигналов приемников $X_m(\omega) = \sum_{k=0}^{K-1} x_m(k) \cdot e^{-\frac{i2\pi}{K}k\omega}$; $\mathbf{S}(\omega) = [S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)]^T$ – вектор сигналов источников, состоящий из фурье-образов сигналов источников $S_n(\omega)=\sum_{k=0}^{K-1}s_n(k)\cdot e^{-\frac{i2\pi}{K}k\omega}$; $\mathbf{Y}(\omega)=[Y_1(\omega),\ldots,Y_M(\omega)]^T$ – вектор шума, состоящий из фурье-образов сигналов шума $Y_m(\omega)=\sum_{k=0}^{K-1}y_m(k)\cdot e^{-\frac{i2\pi}{K}k\omega}$; $\mathbf{H}(\omega)=\begin{pmatrix}H_{11}(\omega) & \cdots & H_{1N}(\omega)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ H_{M1}(\omega) & \cdots & H_{MN}(\omega)\end{pmatrix}$ – $M\times N$ смешивающая матрица, элементами которой являются фурье-образы каналов $H_{mn}(\omega)=\sum_{k=0}^{K-1}h_{mn}(k)\cdot e^{-\frac{i2\pi}{K}k\omega}$. Сигналы источников $\mathbf{S}(\omega)$ и шума $\mathbf{Y}(\omega)$ считаются независимыми.

Каналы могут моделироваться спектральными преобразователями: фильтрами низкой, высокой частоты, резонансными фильтрами и т.д.

В общем случае решение задачи разделения источников сигналов сводится к вычислению разделяющей матрицы $\mathbf{w}(g)$, которая является равной или близкой по тому или иному критерию матрице, обратной матрице $\mathbf{h}(g)$. Таким образом, в общем случае решение задачи разделения сигналов источников есть решение системы (1) и может быть представлено в виде:

(3) $$s_n(k)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{g=0}^{G-1}w_{nm}(g)x_m(k-g),$$

где $\mathbf{w}(g)$ – матрица импульсных характеристик перестраиваемых фильтров с элементами $w_{nm}(g)$. В частотной области уравнение (3) можно записать в виде

(4) $$\mathbf{S}(\omega)=\mathbf{W}(\omega)\mathbf{X}(\omega),$$

где $\mathbf{W}(\omega)=\mathbf{H}^{-1}(\omega)$.

1.2. Детерминированные и статистические методы решения задачи разделения сигналов

Очевидно, что для вычисления разделяющей матрицы $\mathbf{w}(g)$ необходима априорная информация о параметрах модели образования сигналов (параметрах объекта). Для разделения источников сигналов используются различные подходы, которые основываются на разном априорном знании об объекте контроля. Методы разделения сигналов можно разделить на две группы: детерминированные и статистические [1].

Первая группа методов базируется на основе априорной информации о характеристиках каналов передачи сигналов, т.е. на знании матрицы импульсных характеристик $\mathbf{h}(g)$, которые либо измеряются, либо определены из теоретических положений.

Особенностью методов второй группы является то, что элементы матрицы $\mathbf{h}(g)$ в явном виде неизвестны и информацией, используемой для определения входных сигналов $\mathbf{s}$, является реализация вектора измеряемых сигналов $\mathbf{x}(k)$ и знание свойств источников сигналов $\mathbf{s}(k)$.

Группа детерминированных методов основывается на преимущественной информации о каналах передачи сигналов (статистических, частотных, амплитудных и т.п. характеристик каналов), т.е. известны каналы передачи и наблюдаемые сигналы.

Группа статистических методов основывается на преимущественной информации об источниках сигналов, например, некоррелированности источников сигналов, знании законов распределения сигналов и т.д. В этом случае информация о каналах передачи в явном виде недоступна, а известны лишь наблюдаемые сигналы, поэтому эти методы часто называют «слепыми (blind [2])».

Таким образом, решение задачи разделения источников сигналов сводится к вычислению детерминированным или статистическим методом разделяющей матрицы $\mathbf{w}(g)$, которая является равной или близкой по тому или иному критерию матрице, обратной матрице $\mathbf{h}(g)$.

Следует заметить, что существуют методы разделения сигналов, которые явно не относятся к двум указанным группам, ибо используют информацию как о каналах, так и свойствах источников сигналов (например, адаптивные подавители помех [3]).

Из общего решения (3) следует, что задача разделения сигналов относится к классу обратных задач, которые в общем случае могут быть некорректными. Из свойства некорректности задачи разделения сигналов следует, что ее решение может быть неустойчивым, т.е. малые изменения параметров смешивающей матрицы $\mathbf{H}(\omega,\mathbf{l})$ или характеристик сигналов $\mathbf{s}(k)$ источников приводят к недопустимо большим изменениям решения, т.е. неустойчивости вычисления сигналов $\mathbf{s}(k)$ [4]. Для существования точного решения задачи и его единственности необходимо, чтобы параметры объекта, описываемого моделью образования сигналов, удовлетворяли ряду априорных ограничений, например, смешивающая матрица должна быть обратимой, полиномы, описывающие передаточные функции каналов $H_{mn}(\omega,\mathbf{l})$ не должны иметь общих корней, число приемников и источников должно быть равным и др.

В реальных условиях априорные ограничения могут быть нарушены, т.к. параметры объекта могут изменяться из-за эволюции объекта во времени, погрешности измерения параметров, неточности изготовления и других причин, которые невозможно предсказать. Таким образом, изменения параметров $\mathbf{H}(\omega,\mathbf{l})$ и характеристик сигналов источников могут привести к миграции устойчивого решения к неустойчивому, и поэтому непригодному для практического применения. Другими словами, в реальных условиях априорная неопределенность значений параметров модели образования сигналов (параметров объекта контроля) может привести к неустойчивости решения [5].

Поэтому исследование влияния на устойчивость решения отклонений вышеперечисленных свойств сигналов источников от априори предполагаемых, так и отклонений требований к характеристикам каналов, являются актуальными задачами, которые необходимо решить перед конкретными практическими применениями методов статистического разделения сигналов.

Целью работы является разработка алгоритма и компьютерной программы, позволяющих осуществлять анализ и контроль устойчивости решения задачи статистического разделения сигналов.

2. Алгоритм контроля устойчивости статистического разделения сигналов

2.1. Метод анализа устойчивости на основе определения сингулярных интервалов параметров

Для исследования влияния на устойчивость априори неопределенных возмущений предлагается в модель образования сигналов, ввести блоки сингулярных вариаций параметров каналов $\delta\tilde{h}_{mn}$. Тогда модель образования сигналов с вариациями параметров примет вид (5)

$$x_m(k)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{g=0}^{G-1}\left(h_{mn}(g,\mathbf{l})+\delta\widetilde{h}_{mn}(g,\mathbf{l})\right)s_n(k-g)+y_m(k). \tag{5}$$

В частотной области выражение (5) можно записать в виде:

$$\mathbf{X}(\omega)=\left(\mathbf{H}(\omega,\mathbf{l})+\delta\widetilde{\mathbf{H}}(\omega,\mathbf{l})\right)\cdot\mathbf{S}(\omega)+\mathbf{Y}(\omega), \tag{6}$$

где $\delta\widetilde{\mathbf{H}}(\omega,\mathbf{l})$ – матрица сингулярных вариаций параметров.

В отличие от объективно существующих возмущений, вариации параметров в модели для исследований устойчивости можно моделировать с помощью введенного блока задания видов вариации. Таким образом, математическая модель (5), может быть использована для исследования влияния возмущений, задаваемых различными видами вариаций, на устойчивость решения задачи разделения сигналов.

В дальнейшем, матрицы интервалов параметров от исходного $\mathbf{H}(\omega)$ до вырожденного (сингулярного) состояния $\widetilde{\mathbf{H}}(\omega)$ назовем матрицами сингулярных интервалов и обозначим как $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}(\omega)$.

Среди различных видов вариаций рассмотрим наиболее часто встречающиеся в инженерной практике абсолютные, относительные и критические вариации, моделирующие соответствующие виды реальных возмущений [6]. Под критическими вариациями понимают такие, которые приводят исходную модель (5), (6) образования сигналов к вырожденной, при минимальной спектральной норме вариации $\left\|\delta\widetilde{\mathbf{H}}(\omega,\mathbf{l})\right\|_2$. Относительные вариации, как следует из названия, имеют значение, пропорциональное значению элемента матрицы. Абсолютные вариации могут иметь любую величину не связанную со значением текущего элемента матрицы.

Таким образом, целью исследования является определение сингулярных интервалов параметров $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}_{абс}(\omega)$, $\Delta\widetilde{\mathbf{h}}_{абс}(g)$, $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}_{отн}(\omega)$, $\Delta\widetilde{\mathbf{h}}_{отн}(g)$, $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}_{крит}(\omega)$, $\Delta\widetilde{\mathbf{h}}_{крит}(g)$ для вышерассмотренных видов вариаций. В введенных матрицах сингулярных интервалов параметров mn–ые элементы $\Delta\widetilde{H}_{mn}$ указывают изменения параметров mn-ых элементов исходной матрицы $\mathbf{H}(\omega)$.

В частности, если каналы модели являются частотно-независимыми, то в обозначениях матриц сингулярных интервалов параметров опускаются аргументы (ω) и (g), например, $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}_{абс}$, $\Delta\widetilde{\mathbf{h}}_{абс}$.

Таким образом, вычисленные сингулярные интервалы отражают такие абсолютные, относительные и критические возмущения параметров модели образования сигналов, которые приводят ее к неустойчивости.

Для анализа устойчивости путем определения сингулярных интервалов параметров модели необходимо решать две задачи: определять направления вариации параметров $\mathbf{H}(\omega,\mathbf{l})$ модели и определять величину вариации параметров $\mathbf{H}(\omega,\mathbf{l})$ модели для критических, абсолютных и относительных видов вариаций. Решение этих задач в дальнейшем будет рассматриваться для параметров, соответствующих определенной частоте ω и определенному значению $\mathbf{l}$, поэтому для упрощения записи эти параметры в обозначении $\mathbf{H}(\omega,\mathbf{l})$ будут опущены, т.е. обозначение будет иметь вид $\mathbf{H}$.

Предлагаемый в работе метод определения сингулярных интервалов параметров модели включает три этапа: определения направления вариации параметров модели, определении сингулярной матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}$ и собственно определение сингулярных интервалов модели [1]. Рассмотрим каждый из этих этапов.

Сингулярные направления для абсолютных, относительных и критических вариаций определяются матрицами $\widetilde{\mathbf{Z}}$ направлений, теоретическое обоснование которых для каждого вида вариаций представлено в [1], а полученные аналитические выражения приведены в таблице 1.

Таблица 1. Аналитические выражения для вычисления матриц $\widetilde{\mathbf{Z}}$ направлений.

Вид вариации / **Метод расчета**	**Критический**	**Абсолютный**	**Относительный**
На основе обратной матрицы	$\widetilde{\mathbf{Z}}_{крит} = \dfrac{\mathbf{H}^{\;*}}{\left\|\mathbf{H}^{\;1}\right\|_2}$	$\widetilde{\mathbf{Z}}_{абс} = -\dfrac{\lvert\mathbf{A}\rvert \otimes \mathbf{sign}\left(\mathbf{H}^{-*}\right)}{\left\|\lvert\mathbf{A}\rvert \otimes \mathbf{sign}\left(\mathbf{H}^{-*}\right)\right\|_1}$	$\widetilde{\mathbf{Z}}_{отн} = -\dfrac{\lvert\mathbf{H}\rvert \otimes \mathbf{sign}\left(\mathbf{H}^{-*}\right)}{\left\|\lvert\mathbf{H}\rvert \otimes \mathbf{sign}\left(\mathbf{H}^{-*}\right)\right\|_1}$
На основе SVD	$\widetilde{\mathbf{Z}}^{\mathbf{svd}}_{крит} = u_N v_N^*$	$\widetilde{\mathbf{Z}}^{svd}_{абс} = -\dfrac{\lvert\mathbf{A}\rvert \otimes \mathbf{sign}\left(u_N v_N^*\right)}{\left\|\lvert\mathbf{A}\rvert \otimes \mathbf{sign}\left(u_N v_N^*\right)\right\|_2}$	$\widetilde{\mathbf{Z}}^{svd}_{отн} = -\dfrac{\lvert\mathbf{H}\rvert \otimes \mathbf{sign}\left(u_N v_N^*\right)}{\left\|\lvert\mathbf{H}\rvert \otimes \mathbf{sign}\left(u_N v_N^*\right)\right\|_2}$

Матрицы направлений могут вычисляться как на основе сингулярного разложения (SVD), так и на основе обратной матрицы. Определение сингулярных направлений на основе предложенных матриц $\widetilde{\mathbf{Z}}$ имеет меньшую вычислительную сложность по сравнению с известными алгоритмами [6], причем предложенные матрицы $\widetilde{\mathbf{Z}}$ могут быть использованы для определения сингулярных интервалов параметров не только для действительных (как в известных алгоритмах), но и для частотно-зависимых элементов смешивающей матрицы $\mathbf{H}(\omega_g)$.

В таблице 1 обозначены: $\lvert\mathbf{A}\rvert$ – матрица, составленная из модулей элементов матрицы $\mathbf{A}$ и задающая абсолютные вариации параметров; $\mathbf{sign}(\mathbf{A})$ – операция над матрицей, элементы которой вычисляются как $sign(A_{mn}) = A_{mn}/\lvert A_{mn}\rvert$; $\otimes$ – операция поэлементного умножения матриц $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, где $C_{mn} = A_{mn} \cdot B_{mn}$; v_n и u_n – правые и левые сингулярные векторы SVD разложения $\mathbf{H} = \mathbf{U\Sigma V}^* = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n u_n v_n^*$; $\|\ \|_1$ – максимально столбцовая норма.

Содержанием второго этапа предлагаемого метода является определение величины расстояния до ближайшей точки сингулярности для различных видов вариаций параметров. Результаты этого этапа необходимы для определения матрицы $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}$ сингулярных интервалов изменения параметров.

Сингулярную матрицу $\widetilde{\mathbf{H}}$ предлагается [5] вычислять путем нахождения корней уравнения

$$f\left(\mathbf{H}_j + \delta h \cdot \widetilde{\mathbf{Z}}\right) = det\left(\mathbf{H}_j + \delta h \cdot \widetilde{\mathbf{Z}}\right) = 0\,, \tag{7}$$

в условиях ограничений, задаваемых видом вариации параметров (относительных, абсолютных, критических). С инженерной точки зрения интерес представляет ближайший к начальным условиям (начальные параметры модели) корень, который определяет сингулярный интервал изменения параметров. Для определения корней уравнения (7), можно использовать различные численные методы, среди которых выбран метод Ньютона, выделяющийся своей эффективностью и невысокой вычислительной сложностью.

Определение параметров сингулярной матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}$ в точке сингулярности описывается рекуррентным выражением $\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_{j-1} + \delta\widetilde{\mathbf{H}}_{j-1},\quad j = 0,1,2,\ldots,J$, где шаг $\delta\widetilde{\mathbf{H}}_j$ в выбранном направлении определяется следующим образом:

$$(8) \qquad \delta\widetilde{\mathbf{H}}_j = -\frac{\widetilde{\mathbf{Z}} \cdot f\left(\mathbf{H}_j\right)}{f'_{\mathbf{Z}}\left(\mathbf{H}_j\right)},$$

где $\widetilde{\mathbf{Z}}$ – матрица направления, которая в зависимости от выбранного вида вариации параметров равна $\widetilde{\mathbf{Z}}_{абс}, \widetilde{\mathbf{Z}}_{отн}, \widetilde{\mathbf{Z}}_{крит}$. Тогда, используя обобщенное понятие производной на случай нескольких переменных, производная по направлению $\widetilde{\mathbf{Z}}$ может быть представлена так:

$$(9) \qquad f'_{\widetilde{\mathbf{Z}}}\left(\mathbf{H}_j\right) = \frac{df\left(\mathbf{H}_j\right)}{d\widetilde{\mathbf{Z}}} = \frac{f\left(\mathbf{H}_j + \delta h\widetilde{\mathbf{Z}}\right) - f\left(\mathbf{H}_j\right)}{\delta h}.$$

Полученные выражения являются универсальными для абсолютного, относительно, критического видов вариации параметров.

Предложенный метод позволяет следующее: сократить вычислительную сложность и время выполнения; работать с абсолютными, относительными и критическими видами вариации параметров, вид которых задаются матрицей направления $\widetilde{\mathbf{Z}}$; работать с комплексными матрицами.

На третьем этапе вычисление матрицы $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}$ сингулярных интервалов производится следующим образом: $\Delta\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \widetilde{\mathbf{H}}$.

Модификацией предложенного алгоритма является повторный расчет на каждом шаге матрицы $\widetilde{\mathbf{Z}}_j$ направления с целью уточнения сингулярного направления. Такая модификация позволяет для абсолютных и относительных видов вариаций получать более достоверные определения матрицы сингулярных интервалов параметров ценой увеличения сложности вычислений в J раз.

На основе метода вычисления сингулярных интервалов разработаны алгоритм контроля устойчивости для детерминированных методов разделения сигналов [1]. Применять этот алгоритм для статистических методов разделения сигналов невозможно, ибо в этом алгоритме не учитываются особенности статистических методов. Рассмотрим особенности алгоритмов статистического разделения сигналов и алгоритм контроля устойчивости, в котором эти особенности учтены.

2.2. Особенности алгоритмов статистического разделения сигналов

Алгоритмы статистического разделения сигналов базируются на знании характеристик сигналов источников, частотные же характеристики каналов считаются неизвестными, но должны удовлетворять ряду требований, например, отличаться друг от друга, не иметь общих нулей и др.

Существующие методы статистического разделения основываются на одном из (или комбинации нескольких) следующих свойств источников сигналов: независимость сигналов (статистическая независимость, некоррелированность источников сигналов и шума), знание законов распределения сигналов (нормальное, равномерное и др.), а также такие свойства как нестационарность (изменение статистических характеристик во времени) и т.д.

По сравнению с детерминированными методами статистические обладают преимуществом, т.к. не требуют знания динамических характеристик каналов. С другой стороны, платой за расширение функциональных возможностей статистических методов является сильная зависимость погрешности и устойчивости разделения от соответствия реальных свойств сигналов априори предполагаемым свойствам, а также от выполнения ограничений на характеристики каналов. Это усложняет применение статистических методов.

Важно, что в отличие от детерминированных методов, в статистических методах на устойчивость влияют не только свойства каналов, но и свойства сигналов.

Также известно [2], что в статистических методах разделение сигналов производится с точностью до масштабного множителя и перестановки, т.е. решение задачи статистического разделения сигналов имеет вид:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{P}$ – матрица перестановки [2], $\mathbf{A}$ – диагональная масштабирующая матрица, диагональными элементами которой являются масштабные множители.

Разделение сигналов с точностью до масштабного множителя означает, что амплитуды разделенных сигналов $\hat{\mathbf{s}}$ могут быть произвольными и не соответствовать их вкладам в аддитивные смеси $\mathbf{x}$ (в наблюдаемые сигналы), кроме того фазы сигналов источников $\mathbf{s}$ и разделенных сигналов $\hat{\mathbf{s}}$ могут отличаться, например, сигналы источников и разделенных сигналов могут быть в противофазе. Другими словами, в разделенных сигналах $\hat{\mathbf{s}}$ достоверна только их форма, а амплитудные и фазовые параметры произвольны.

Разделение с точностью до перестановки означает, что в процессе разделения позиция разделенных сигналов на выходах разделяющей матрицы $\mathbf{W}$ может меняться: сигнал от первого источника s_1 может быть на первом выходе $\hat{s}_1$, далее – на втором выходе $\hat{s}_2$, а сигнал второго источника s_2 может перейти на первый выход $\hat{s}_1$ и т.д.

Поэтому важными для практических приложений являются исследования влияния на устойчивость статистических алгоритмов разделения сигналов отклонений свойств сигналов источников от априори предполагаемых, так и отклонений требований к характеристикам каналов.

2.3. Алгоритм контроля устойчивости статистического разделения сигналов на основе вычисленных сингулярных интервалов параметров модели

Для анализа устойчивости статистического разделения сигналов при вариациях параметров каналов смешивающей матрицы $\mathbf{H}$ предлагается использовать метод, основанный на вычислении сингулярных интервалов. Под сингулярными интервалами понимается матрица $\Delta\tilde{\mathbf{H}}$ интервалов параметров от исходного $\mathbf{H}$ до вырожденного (сингулярного) состояния $\tilde{\mathbf{H}}$ смешивающей матрицы $\mathbf{H}$.

Предлагаемый алгоритм контроля устойчивости статистического разделения при вариации параметров каналов состоит из следующих шагов и приведен в таблице 2.

На первом шаге с помощью выбранного метода слепого разделения сигналов решается задача разделения сигналов и соответственно определяется разделяющая матрица $\mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}$.

Таблица 2. Алгоритм контроля устойчивости статистического разделения сигналов

№	Действие	Комментарий
1	$\mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}$	Вычисляется разделяющая матрица наоснове статистического алгоритма
2	$\breve{\mathbf{W}} = (\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{W}$	Учитываются эффекты перестановки и масштабирования
3	$\breve{\mathbf{H}} = \breve{\mathbf{W}}^{-1}$	Вычисляется смешивающая матрица
4	Вычисление сингулярных интервалов $\Delta\tilde{\mathbf{H}}$	Вычисление для выбранного вида вариации параметров (относительные, критические и др.)

5	Проверка $\left\|\Delta\mathbf{H}_{max}\right\| \le \left\|\eta \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{H}}\right\|$	Производится контроль устойчивости

На втором шаге используется разработанный вспомогательный алгоритм, устраняющий влияние изменения масштабирования $\mathbf{A}$ и перестановок $\mathbf{P}$, т.е. определяется скорректированная разделяющая матрица $\breve{\mathbf{W}}$, в которой влияние матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{A}$ устранено.

На третьем шаге на основе разделяющей матрицы вычисляется смешивающая матрица $\breve{\mathbf{H}}$.

На четвертом шаге вычисляются сингулярные интервалы $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}$ для выбранных видов вариации параметров [1].

На пятом шаге осуществляется контроль устойчивости путем сравнения вычисленных сингулярных интервалов $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}$ с пороговыми значениями $\Delta\widetilde{\mathbf{H}}_{max}$ на основе предложенного в [1] критерия.

Для решения проблем с масштабированием и перестановкой предлагается использовать дополнительную априорную информацию о сигналах и каналах.

Так, для модели с частотно-независимыми каналами проблему масштабирования, связанную со скачком фазы разделенного сигнала относительно сигнала источника, можно решить, используя априорную информацию о смешивающей матрице $\mathbf{H}$: элементы матрицы неотрицательны (нет скачков фазы). Тогда вычисленную в процессе статистического разделения матрицу $\mathbf{W}$ нужно модифицировать следующим образом: $\breve{\mathbf{W}} = \left|\mathbf{W}^{-1}\right|^{-1} = \left|\mathbf{H}\right|^{-1}$.

Для матрицы $\mathbf{H}$, где все элементы неотрицательны, очевидно $\left|\mathbf{H}\right|^{-1} = \mathbf{H}^{-1}$. Для разделяющей матрицы $\mathbf{W}$, для которой одно или несколько решений имеют сдвиг по фазе на π можно записать $\mathbf{W} = \left(\mathbf{H} \cdot \widetilde{\mathbf{E}}\right)^{-1}$, где $\widetilde{\mathbf{E}}$ – диагональная единичная матрица, диагональные элементы которой указывающие на элементы разделяющей матрицы $\mathbf{W}$, ответственные за сдвиг фазы на π, равны (–1). Для компенсации влияния сдвига по фазе, матрица $\mathbf{W}$ должна быть преобразована к матрице $\breve{\mathbf{W}}$ следующим образом

$$\left|\mathbf{W}^{-1}\right|^{-1} = \left|\mathbf{H} \cdot \widetilde{\mathbf{E}}\right|^{-1} = \left(\left|\mathbf{H}\right| \cdot \left|\widetilde{\mathbf{E}}\right|\right)^{-1} = \mathbf{H}^{-1}.$$

Проблему масштабирования (определение реальных амплитуд разделенных сигналов) можно решить на основе априорной информации об энергии сигналов источников. В этом случае масштабный коэффициент a_m для s_m сигнала можно определить на основе следующего выражения

$$a_m = \frac{\widehat{s}_m}{\left\|\widehat{s}_m\right\|^2} \cdot \left\|s_m\right\|^2 .$$

Проблема перестановки может быть решена, например, на основе априорной информации о позициях разделенных сигналов на выходах разделяющей матрицы $\mathbf{W}$. Тогда контролируя нормы разности между матрицами на текущем $\mathbf{H}_k$ и предыдущем $\mathbf{H}_{k-1}$ шагах возможно определять матрицы перестановки $\mathbf{P}$ и масштабирования $\mathbf{A}$.

2.4. Компьютерное моделирование алгоритма контроля устойчивости статистического разделения сигналов

Работоспособность предложенного алгоритма контроля устойчивости подтверждается методом компьютерного моделирования для задачи разделения двух источников сигналов на примере широко распространенного алгоритма Independent Component

Analysis (ICA) [7] .

Алгоритм ICA основан на центральной предельной теореме, из которой следует, что сумма независимых произвольных переменных обычно имеет распределение, которое ближе к гауссовскому, чем любая из исходных входных переменных. Таким образом, естественной мерой статистической независимости является негауссовость, поэтому для разделения смеси сигналов необходимо максимизировать негауссовость источников.

На первом этапе моделирования будем считать, что свойства сигналов удовлетворяют априорным ограничениям для алгоритма ICA [7], обеспечивающим устойчивое решение задачи. Тем самым исключим фактор влияния на устойчивость разделения свойств сигналов.

Рассмотрим модели образования сигналов, задаваемые смешивающими матрицами $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ разной степени обусловленности: $cond(\mathbf{H}_1) \approx 18.6$ и $cond(\mathbf{H}_2) \approx 1105{,}5$, $M=N=2$, погрешность измерения элементов матриц определяются 9 двоичными разрядами:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.53 \\ 0.65 & 0.45 \end{pmatrix},\ \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.50 \\ 0.63 & 0.33 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Определим разделяющие матрицы $\breve{\mathbf{W}}_1$ и $\breve{\mathbf{W}}_2$ с помощью рассмотренного выше алгоритма ICA с использованием вспомогательного алгоритма, устраняющего влияние перестановок и масштабирования. Получим:

$$\breve{\mathbf{W}}_1 \approx \begin{pmatrix} 4.55 & -5.39 \\ -6.50 & 9.88 \end{pmatrix},\ \breve{\mathbf{W}}_2 \approx \begin{pmatrix} -161.18 & 244.56 \\ 324.38 & -489.08 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Вычислим смешивающие матрицы $\breve{\mathbf{H}}_1$ и $\breve{\mathbf{H}}_2$.

Шаг 3. Определим матрицы $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_1$ и $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_2$ сингулярных интервалов параметров для критического вида вариации параметров. Найденные матрицы сингулярных интервалов параметров следующие:

$$\Delta\tilde{\mathbf{H}}_1 \approx \begin{pmatrix} -2.42 & 3.44 \\ 2.85 & -5.23 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2},\ \Delta\tilde{\mathbf{H}}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.4 & -0.7 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Видно, что для плохо обусловленной матрицы $\mathbf{H}_2$ сингулярные интервалы $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_2$ на порядок меньше, что подтверждает правильность работы предложенного алгоритма.

Шаг 4. Исходя из разрядности АЦП $r=9$, выберем $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_{max} = 2 \cdot 10^{-3}$ и проведем контроль устойчивости решения с использованием критерия [1]. В соответствии с этим критерием решение для смешивающей матрицы $\mathbf{H}_2$ неустойчиво, что также видно из рис.1- г, показывающим неправильное разделение сигналов. Погрешности устойчивого разделения (рисунок 1-в для хорошо обусловленной матрицы $\mathbf{H}_1$) равны 0.023% для первого сигнала, 0.029% для второго сигнала, а погрешности неустойчивого разделения (для плохо обусловленной матрицы $\mathbf{H}_2$) равны 5.86% для первого сигнала, 21.27% для второго сигнала.

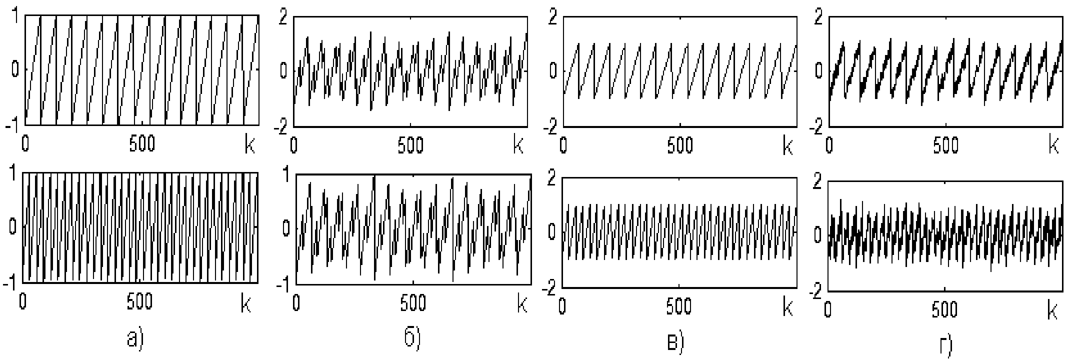

Рис. 1. Тестовые пилообразные сигналы а) 15Гц и 35 Гц, б) образованные смеси, в) устойчивое и г) неустойчивое разделение алгоритмом ICA.

На втором этапе моделирования исследуется предложенный алгоритм для анализа устойчивости статистического разделения сигналов, когда свойства сигналов не удовлетворяют априорным ограничениям, обеспечивающим устойчивое решение. При этом будем считать, что свойства каналов, удовлетворяют априорным ограничениям, обеспечивающим устойчивое решение задачи.

Используем для моделирования хорошо обусловленную смешивающую матрицу $\mathbf{H}_1$ из предыдущего примера. При этом для моделирования влияния отклонений параметров сигналов от априорных предположений исследуем зависимость погрешности разделения сигналов от коэффициента корреляции сигналов источников. В примере неустойчивое разделение будем моделировать выбором пилообразных источников сигналов с близкими частотами 15 Гц и 15.01 Гц.

Шаг 1. Определим разделяющую матрицу $\mathbf{W}_3$ с помощью рассмотренного выше метода ICA.

Шаг 2. Вычислим смешивающую матрицу $\breve{\mathbf{H}}_3$.

Шаг 3. Определим матрицу $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_3$ сингулярных интервалов параметров для критического вида вариации параметров:

$$\Delta\tilde{\mathbf{H}}_3 \approx \begin{pmatrix} -0.2 & -3.5 \\ 0.2 & 4.8 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Для хорошо обусловленной смешивающей матрицы $\mathbf{H}_1$ полученные сингулярные интервалы $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_3$ очень малы. Это противоречие объясняется тем, что неустойчивость решения задачи разделения (плохая обусловленность матрицы $\mathbf{W}_3$) обусловлена несоответствием свойств источников сигналов априорным ограничениям, обеспечивающим устойчивое решение задачи (сильной коррелированностью источников).

Шаг 4. Для заданного $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_{max} = 2 \cdot 10^{-3}$ проведем контроль устойчивости. В соответствии с критерием матрица $\breve{\mathbf{W}}_3$ указывает на неустойчивость решения, что также видно из рис.2- в, из которого видно сигналы разделяются неправильно, что подтверждает работоспособность алгоритма контроля устойчивости для случая несоответствия параметров источников априорным требованиям.

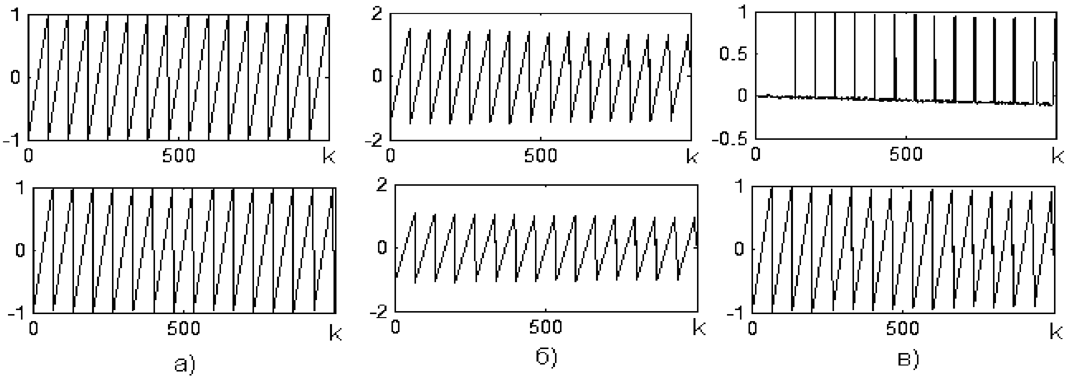

Рис. 2. Тестовые пилообразные сигналы а) 15Гц и 15.01 Гц, б) образованные смеси, в) неустойчивое разделение.

Погрешности неустойчивого разделения равны 99% для первого сигнала, 0.9% для второго сигнала, т.е. результаты разделения сигналов практически не приемлемы.

На рис. 3 приведены другие результаты компьютерного моделирования статистического разделения сигналов, показывающие влияние на устойчивость разделения свойств источников сигналов.

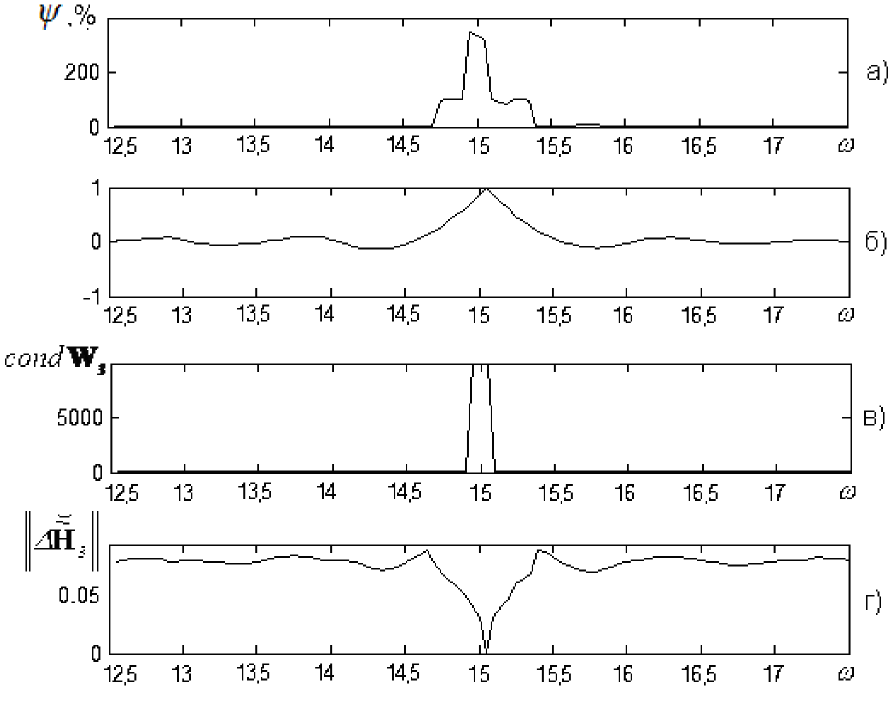

Рис. 3. Графики зависимости от частоты сигнала источника S_2: а) суммарной погрешности разделения сигналов, б) коэффициента корреляции источников, в) числа обусловленности $cond\mathbf{W}_3$, г) нормы матрицы сингулярных интервалов $\left\|\Delta\breve{\tilde{\mathbf{H}}}_3\right\|$.

Моделирование производилось на тестовых задачах с известными источниками сигналов и параметрами смешивающей матрицы $\mathbf{H}(\omega)$.

Погрешность ψ разделения сигналов определяется как приведенная к мощности сигнала источника величина мощности сигнала ошибки разделения $\sum_{k=0}^{K-1}\left(s(k)-s_{\alpha}(k)\right)^2$:

$$\psi=\frac{\sum_{k=0}^{K-1}\left(s(k)-s_{\alpha}(k)\right)^2}{\sum_{k=0}^{K-1}s^2(k)}\quad 100\%$$

где $s(k)$, $s_{\alpha}(k)$ –точное и вычисленное значения сигналов соответственно.

Для модели с хорошо обусловленной смешивающей матрицей $\mathbf{H}_1$ ($cond(\mathbf{H}_1)\approx 18.6$) из рассмотренного примера производилось изменение частоты одного из сигналов источников от 12.5Гц до 17.5Гц с шагом 0.05Гц при постоянной частоте второго источника 15Гц.

На рис. 3 показаны в зависимости от частоты: суммарная погрешность разделения сигналов (рис. 3-а), коэффициент корреляции источников (рис. 3-б), число обусловленности разделяющей матрицы $\mathbf{W}_3$ (рис. 3-в), норма вычисленной матрицы сингулярных интервалов $\left\|\varDelta\tilde{\breve{\mathbf{H}}}_3\right\|$ (рис. 3-г).

При коэффициенте корреляции больше 0.3 (существенная коррелированность сигналов источников) наблюдаются резкие возрастание числа обусловленности (более 10000) и уменьшение нормы вычисленной матрицы сингулярных интервалов $\left\|\varDelta\tilde{\breve{\mathbf{H}}}_3\right\|$. Это соответствует значительному росту погрешности разделения (более 30%) из-за неустойчивого разделения сигналов.

Алгоритм анализа устойчивости также обобщается на случай, когда на устойчивость разделения влияют одновременно как характеристики каналов, так и характеристики сигналов.

Разработанные алгоритм и программа применяются на железнодорожном транспорте для обработки сигналов автоматической локомотивной сигнализации с целью анализа сигналов и помех в задачах мониторинга системы управления интервальным движением поездов.

3. Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

По сравнению с детерминированными методами, методы статистические (слепые) обладают преимуществом, т.к. не требуют знания характеристик каналов. С другой стороны, погрешность и устойчивость разделения статистических методов сильно зависят от соответствия реальных свойств сигналов априори предполагаемым свойствам, а также от выполнения ограничений на характеристики каналов.

Предложен алгоритм анализа и контроля устойчивости статистических методов разделения сигналов, разработанный на основе вычисленных сингулярных интервалов параметров модели, который отличается от алгоритмов контроля для детерминированного разделения тем, что учитывает эффекты перестановки и масштабирования, возникающие в статистических алгоритмах разделения сигналов.

Проведено исследование разработанного алгоритма для определения влияния свойств каналов модели образования сигналов на погрешность и устойчивость разделения сигналов, которое показало достоверность разработанного алгоритма контроля устойчивости.

На основе разработанных алгоритма и программы исследована зависимость погрешности и устойчивости разделения сигналов источников от отклонений свойств сигналов от априори предполагаемых.

Список литературы

1. Засов В.А. Алгоритмы и вычислительные устройства разделения и восстановления сигналов в многомерных динамических системах: монография. Самара: СамГУПС, 2012. 233 с.
2. Cichocki A., Amari C. Adaptive blind signal and image processing: Learning algorithms and applications. Wiley, 2002. 555 p.
3. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 385 с.
5. Петров Ю.П., Сизиков В.С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: учебное пособие для вузов. СПб: Политехника, 2003. 261 с.
6. Петров Ю.П. Как получать надежные решения систем уравнений. СПб.: БХВ-Петербург, 2009. 176 с.
7. Independent component analysis / Aapo Hyvarinen, Juha Karhunen, Erkki Oja. John Wiley & Sons, Inc., 2001. 481 p.